ЛЕКЦИЯ-2
Екінші текті меншіксіз интегралдар

Айталық, $[a,b)$ жартыкесіндіде шектелмеген $f(x)$ функциясы берілген, алайда осы аралықта жатқан кез келген $[a,b-\varepsilon],(\varepsilon>0)$ кесіндіде шектелген және интегралданады, онда $x=b$ нүктесін $f(x)$ функциясының ерекше нүктесі деп атайды.

Сонымен, $[a,b-\varepsilon]$ кесіндісінде ε тәуелді функция анықталды

$$F(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Анықтама. Егер шек

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

шекті сан болса, оны $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі екінші текті меншіксіз интегралы деп атайды және

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (11)$$

белгілейді. Бұл жағдайда меншіксіз интегралды жинақты деп, ал (11) шек болмаса немесе шексіздікке тең болса, онда меншіксіз интегралды жинақсыз деп атайды.

Жоғарыдағыдай $x=a$ нүктесі $f(x)$ функциясының ерекше нүктесі болса, онда шексіз аз $\varepsilon>0$ санына сәйкес екінші текті меншіксіз интеграл

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (12)$$

анықталады.

Егер a және b нүктелерінің екеуі де ерекше нүкте болса, онда меншіксіз интеграл төмендегі түрде анықталады:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)dx . \qquad (13)$$

Егер $a<c<b$ сан болса

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

теңдігі орынды және теңдіктің оң жағындағы меншіксіз интегралдар жинақты болса, сол жағындағы меншіксіз интеграл да жинақты.

Мысалдарды қарастырайық

7-мысал. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттейік.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясының $x=1$ ерекше нүктесі, алайда $[0,1-\varepsilon],(\varepsilon>0)$ кесіндісінде үзіліссіз, яғни интегралданады және

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin \Big|_0^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(1-\varepsilon)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2} .$$

Сонымен, меншіксіз интеграл жинақты және

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2} .$$